7-ci siniflər

11. n natural ədəd və a, b, c tək natural ədədlərdir.
$\frac{3}{8}<\frac{a}{n}<\frac{b}{n}<\frac{c}{n}<\frac{1}{2}$ bərabərsizliyinin ödənməsi üçün $a+b+c$ cəmi ən az neçə olar?

Həlli.
Aydındır ki, $a<b<c$. Həmçinin, $a+b+c$ cəmi minimum olması üçün a, b, c ədədləri ardıcıl tək ədədlər olamalıdır, onda $c-a=4$ olar. Həmçinin asanlıqla görmək olar ki, $a+b+c$ cəmi onda minimum olur ki, n öz minimum qiymətini alsın.
Bərabərsizliyin hər iki tərəfini $8n$-ə vursaq alarıq ki,

$$3n<8a<8b<8c<4n$$

$3n$ və $8a$ hər ikisi natural ədədlər olduğu üçün deyə bilərik ki $3n \leq 8a-1$. Digər tərəfdən $8c<4n$ ədələrinin hər ikisi 4-ə bölündüyü üçün onların arasındakı fərq ən az 4-ə bərabərdir, yəni

$$4n \geq 8c+4$$

Bu iki bərabərsizliyi tərəf-tərəfə çıxsaq,

$$4n-3n \geq 8c+4-(8a-1)=8(c-a)+5$$

Və $c-a=4$ olduğunu istifadə etsək alarıq ki,

$$n \geq 8 \times 4+5=37$$

$n=37$ və $n=38$ olarsa, asanlıqla yoxlayaraq ala bilərik ki, belə a, b, c ədədləri yoxdur.

$n=39$ olarsa, $a=15$, $b=17$ və $c=19$ ədədləri verilmiş şərti ödəyir. Onda $a+b+c$ ən az

$15+17+19=51$ ola bilər.

Qiymətləndirmə meyarları:

1. $3n<8a<8b<8c<4n$ bərabərsizliyini yazmaq..**2 bal**
2. $3n \leq 8a-1$ olduğunu göstərmək..**1 bal**
3. $4n \geq 8c+4$ olduğunu göstərmək..**2 bal**
4. $c-a=4$ və $n \geq 8 \times 4+5=37$ tapmaq..**3 bal**
5. $n=37$ və $n=38$ ola bilmədiyini göstərmək..**1 bal**
6. $n=39$ olarsa $a+b+c=51$ tapmaq...**1 bal**

12. Üzərində 1-dən 295-ə qədər (1 və 295 daxil) nömrələnmiş 295 ədəd top bir torbaya atılır. Bu toplardan 2-si təsadüfən götürülür. Götürülən ədədlərin cəmi 15-ə tam bölünərsə, bu topların ikisi də torbadan xaricə qoyulur, əks halda yenidən torbaya atılır.
Bu qayda ilə davam etməklə, cəmi 15-ə tam bölünənlərin hamısı qırağa qoyulduqda torbada neçə top qalar?

Həlli.
1-dən 284-ə qədər ədədləri aşağıdakı kimi qruplaşdırmaq olar,hər qrupdakı ədədlərin cəmi 285 olacağına görə onların hamısı torbadan çıxarıla bilər.

1 və 284
2 və 283
....
142 və 143

Yerdə qalan ədədlərdən, 295 və 290, 294 və 291, 293 və 292 cütləri qruplaşdırılaraq torbadan çıxarıla bilər. Lakin yerdə qalan ədədlər: 285,286,287,288 və 289 torbadan çıxarıla bilməyəcək, deməli cəmi 5 top qalmalıdır.

Qiymətləndirmə meyarları:

1. İlk 284 ədədi qruplaşdırmaq ……..**7 bal**
2. Son 10 ədəddən ən az 5-in qaldığını göstərmək..**3 bal**

13. Hər biri özündən əvvəlkindən 40 vahid böyük olan 2-dən çox natural ədədin cəmi 994-dür. Bu ədədlərin sayını tapın.

Həlli.
Bu ədədlərin ən kiçiyini x ilə və ədədlərin sayını n ilə işarə edək, onda ədədlər

$$x$$
$$x+40$$
$$x+80$$
$$...$$
$$x+40(n-1)$$

şəklində olar və onların cəmi isə aşağıdaki kimi hesablana bilər:

$$x+x+40+x+80+\cdots+x+40(n-1)=nx+40\frac{n(n-1)}{2}=n(x+20n-20)=994$$

$n\geq 8$ olarsa, $n(x+20n-20)\geq 8(x+160-20)>8\cdot 140=1120>994$ olar. Deməli $n\leq 7$ olmalıdır.

Digər tərəfdən, $n(x+20n-20)=994$ olacağından, n natural ədədi 994 -ün natural böləni olmalıdır, $994=2\cdot 7\cdot 71$ olduğu üçün, 994-ün 2 −dən böyük və 8 −dən kiçik yeganə böləni 7-dir. Deməli, n ancaq 7 ola bilər. Həqiqətən də $n=7$ olarsa, tənlikdən $x=22$ taparıq və $22,62,102,\dots,262$ ədədləri verilmiş bütün şərtləri ödəyər.

Qiymətləndirmə meyarları:

3. $n(x+20n-20)=994$ tənliyini qurmaq…..**5 bal**
4. $n\geq 8$ ola bilmədiyini göstərmək...**2 bal**
5. $n|994$ olmağından istifadə edərək $n=7$ tapmaq...**2 bal**
6. $n=7$ olarsa $22,62,102,\dots,262$ ədədlərinin şərti ödədiyini göstərmək........................**1 bal**

14. *A, B, C, D, E, F* sıfırdan böyük müxtəlif rəqəmlərdir.
$7\cdot\overline{ABCDEF}=6\cdot\overline{DEFABC}$ olarsa, $\overline{DEF}-\overline{ABC}=?$

Həlli.
Mərtəbə vahidlərinə ayrılıçdan istifadə edərək yaza bilərik ki,
$$\overline{ABCDEF}=1000\times\overline{ABC}+\overline{DEF}$$
və
$$\overline{DEFABC}=1000\times\overline{DEF}+\overline{ABC}$$
Bu eynilikləri tənlikdə yazsaq, alarıq ki,
$$7000\times\overline{ABC}+7\times\overline{DEF}=6000\times\overline{DEF}+6\times\overline{ABC}$$
Oxşar hədləri islah etdikdə alarıq ki,
$$6994\times\overline{ABC}=5993\times\overline{DEF}$$
$ƏBOB(6994,5993)=13$ olduğu üçün, hər iki tərəfi 13-ə bölə bilərik:
$$538\times\overline{ABC}=461\times\overline{DEF}$$
538 və 461 qarşılıqlı sadə ədələr olduğu üçün, $\overline{ABC}=461k$ və $\overline{DEF}=538k$ şəklində olmalıdır, burda k hər hansı natural ədəddir.
Lakin $k\geq 2$ olarsa $\overline{DEF}=538k\geq 2\cdot 538=1076$ ədədi 3 rəqəmli ola bilməz. Deməli $k=1$.
Onda $\overline{ABC}=461,\ \overline{DEF}=538$ və $\overline{DEF}-\overline{ABC}=77$.

Qiymətləndirmə meyarları:

7. $6994\times\overline{ABC}=5993\times\overline{DEF}$ şəklində yazmaq...**5 bal**
8. $538\times\overline{ABC}=461\times\overline{DEF}$ olaraq ixtisar etmək...**2 bal**
9. $\overline{ABC}=461,\ \overline{DEF}=538$ və $\overline{DEF}-\overline{ABC}=77$ olduğunu tapmaq…………………**3 bal**

15. m və n qarşılıqlı sadə ədədlərdir.

$$\frac{5}{2\cdot3\cdot4}+\frac{6}{3\cdot4\cdot5}+\frac{7}{4\cdot5\cdot6}+\ldots+\frac{16}{13\cdot14\cdot15}=\frac{m}{n}$$

$m+n=?$

Həlli.

Verilmiş ifadənin hər bir həddi aşağıdaki kimi ifadə oluna bilər:

$$\frac{n+3}{n(n+1)(n+2)}$$

Və kəsri iki kəsrin cəmi şəklində açağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\frac{n+3}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n(n+1)(n+2)}+\frac{2}{n(n+1)(n+2)} \qquad (1)$$

Həmçinin, ixtisar etsək:

$$\frac{n+1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right) \qquad (2)$$

Digər tərəfdən,

$$\frac{2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n+2-n}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n+2}{n(n+1)(n+2)}-\frac{n}{n(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)} \qquad (3)$$

Onda verilmiş cəm aşağıdakı kimi hesablana bilər,

$$\frac{5}{2\cdot3\cdot4}+\frac{6}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{16}{13\cdot14\cdot15}=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\right)+\frac{1}{13\cdot14}-\frac{1}{14\cdot15}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\right)+\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{13\cdot14}-\frac{1}{14\cdot15}= \qquad (4)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\right)+\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{14\cdot15}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{14}-\frac{1}{15}\right)+\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{14\cdot15} \qquad (5)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{28}-\frac{1}{30}+\frac{1}{6}-\frac{1}{210}=\frac{105+70-15-14+70-2}{420}=\frac{214}{420}=\frac{107}{210}$$

$\frac{m}{n}=\frac{107}{210}$ kəsri ixtisar olunmayan kəsr olduğundan $m+n=107+210=317$.

Qiymətləndirmə meyarları:

1. (1) ayrılışını etmək……………………………………………………………………**3 bal**
2. (2) ayrılışını etmək……………………………………………………………………**1 bal**
3. (3) ayrılışını etmək……………………………………………………………………**1 bal**
4. Ayrılışları ifadə də yerinə yazmaq və (4) şəklinə gətirmək……………………………**2 bal**
5. İfadənin qiymətinin (5)-ə ekvivalent olduğunu göstərmək……………………………**2 bal**
6. $\frac{m}{n}=\frac{107}{210}$ olduğunu tapmaq və $m+n=317$ tapmaq………………………**1 bal**