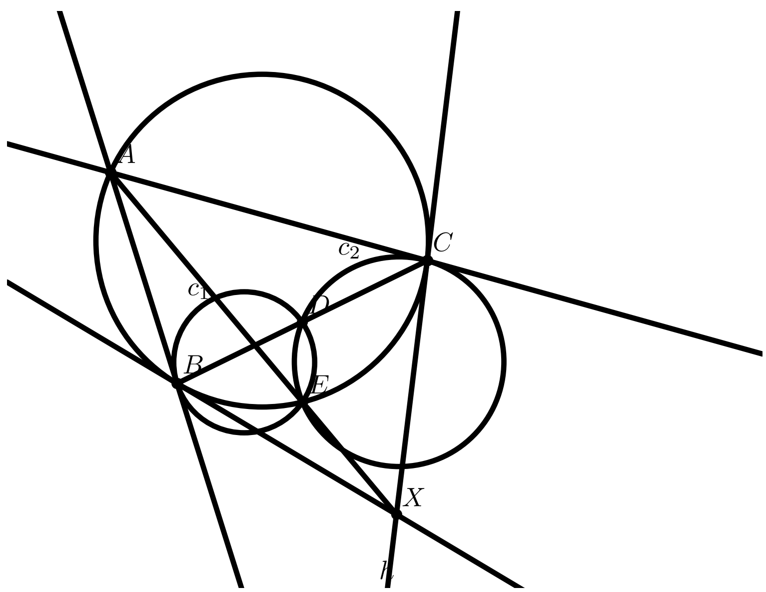
Riyaziyyat fənni üzrə Yuxarı Yaş qrupu üçün Seçmə İmtahanın həlləri və qiymətləndirmə meyarları

Sual 1. *c_1 və c_2 çevrələri D və E nöqtələrində kəsişirlər. B və C nöqtələri uyğun olaraq c_1 və c_2 çevrələri üzərində elə nöqtələrdir ki, B, D və C nöqtələri bir düz xətt üzərindədirlər və $BD = DC$. c_1 və c_2 çevrələrinə uyğun olaraq B və C də çəkilmiş toxunanlar A-da kəsişirlər. İsbat edin ki, $DA \cdot DE = DC^2$*

Həlli. $\angle BED = \alpha$ və $\angle CED = \beta$ olsun. Bir çevrədə eyni qövsə baxan daxili bucaq ilə toxunan vətər bucağı bərabər olduğundan $\angle ABD = \angle BED$ və $\angle ACD = \angle CED = \beta$ olar. ABC üçbucağından $\angle BAC = 180° - \alpha - \beta$ olar. Buradan da $\angle BAC + \angle BEC = (180° - \alpha - \beta + \alpha + \beta = 180°$ alınar.
Deməli $ABEC$ dördbucaqlısı xaricinə çevrə çəkilə biləndir (1).
(1)-dən alırıq ki, $\angle AEB = \angle ACB = \beta$. BEC üçbucağına nəzər salaq: ED mediandır və $\angle CED = \beta = \angle BEA$, deməli EA xətti BEC üçbucağında E "symmediandır. Həmçinin dördbucaqlısı xaricinə çevrə çəkilə bilən olduğundan, AE xətti ABC üçbucağında A "symmedian"olar. Onda AE xətti "symmedian"və AD xətti də median olduğundan $\angle BAE = \angle CAD$ olar. $\angle BAE = \angle CAD = \theta$ olsun. (1)–dən $\angle BAE = \theta = \angle BCE$ olar. Yekunda $\angle ACD = \beta = \angle CED$ və $\angle CAD = \theta = \angle DCE$ alarıq. Onda Bucaq-Bucaq (BB) oxşarlığından $\triangle ACD \sim \triangle CED$ alarıq. Bu oxşarlıq nisbətinə görə:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{ED} \implies DA \cdot DE = DC^2$$



□

- **A1)** $ABEC$ dördbucaqlısının xaricinə çevrə çəkilə bilən olduğunu isbat etmək (yazıda) *+2 bal*
- **B1)** $\angle BEA = \angle CED$ bərabərliyini isbat etmək (yazıda) *+1 bal*
- **B2)** EA xəttinin EBC üçbucağının "symmedian"-ı olduğunu qeyd etmək (yazıda) *+2 bal*
- **B3)** AE xəttinin ABC üçbucağının "symmedian"-ı olduğunu və ya $\angle BAE = \angle CAD$ bərabərliyini isbat etmək (yazıda) *+5 bal*
- **C1)** $\angle BAE = \angle BCE$ bərabərliyini isbat etmək (yazıda) *+1 bal*
- **C2)** $\triangle ACD \sim \triangle CED$ vasitəsilə $DA \cdot DE = DC^2$ bərabərliyini isbat etmək (yazıda) *+3 bal*

Qeyd: Fərqli kateqoriyalardakı ballar toplanır. Eyni kateqoriyalardakı ballar isə toplanmır.

Sual 2. *Bütün $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiyalarını tapın ki, aşağıdakı bərabərlik istənilən həqiqi x və y ədədləri üçün ödənilsin.*

$$f(f(x) + xf(y)) = xf(y+1)$$

Həlli. Sualın şərtində $x = y = -1$ əvəzləməsi etdikdə $f(0) = 0$ əldə edirik. Sonra $y = 0$ əvəzləməsindən

$$f(f(x)) = xf(1) \qquad \textbf{(1)}$$

bərabərliyini əldə edərik.

İlk olaraq fərz edək ki, $f(1) \neq 0$. Onda f inyektiv funksiyadır. Çünki bəzi x_1, x_2 ədədləri üçün $f(x_1) = f(x_2)$ olarsa, bu qiymətləri **(1)** bərabərliyində yerinə qoysaq $x_1 = x_2$ taparıq. Sualın şərtində $x = 1$ əvəzləməsini aparsaq və f funksiyasının inyektiv olduğundan istifadə etsək,

$$f(1) + f(y) = y + 1$$

bərabərliyini əldə edərik.

Bu bərabərlikdə $y = 1$ əvəzləməsi aparsaq $2f(1) = 2$ olar və deməli $f(1) = 1$ olar. Yenidən bu bərabərlikdən asanlıqla görərik ki, $f(y) = y, \forall y \in \mathbb{R}$ olmalıdır və bu funksiya sualın şərtini ödəyəcəkdir.

İndi isə $f(1) = 0$ olma halına nəzər yetirək. Onda **(1)**-ə görə

$$f(f(x)) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

olduğunu taparıq.

Sualın şərtində $x = 1$ əvəzləməsini etdikdə

$$0 = f(f(y)) = f(f(1) + 1 \cdot f(y)) = f(y+1), \forall y \in \mathbb{R}$$

əldə edərik. Bu bərabərlikdə x həqiqi ədədi üçün $y = x - 1$ əvəzləməsi etsək $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ həllini əldə edərik və bu həll də sualın şərtini ödəyəcəkdir.

$\square$

- $f(0) = 0$ olduğunu tapmaq — *+1 bal*
- **(1)** bərabərliyini (və ya ekvivalentini) tapmaq — *+1 bal*
- $f(1) \neq 0$ halını həll etmək — *+4 bal*
- $f(1) = 0$ halını həll etmək — *+4 bal*
- Sadəcə həlləri qeyd etmək — *+0 bal*
- Həllərin ödədiyini yoxlamamaq — *-1 bal*

Sual 3. *Bütün elə k natural ədədlərini tapın ki, elə x, y natural ədədləri mövcud olsun ki, $\frac{x^k y}{y^2-x^2}$ ədədi sadə ədəd olsun.*

Həlli. Tutaq ki, $d = \text{ƏBOB}(x, y)$ olsun. Onda x_1, y_1 qarşılıqlı sadə ədədləri üçün $x = dx_1, y = dy_1$ kimi yaza bilərik. Şərtdəki ifadənin p sadə ədədi üçün aşağıdakı formada olmasını istəyirik:

$$\frac{d^{k-1}}{y_1^2 - x_1^2} x_1^k y_1 = p$$

Lakin $\text{ƏBOB}\left(x_1^k, y_1^2 - x_1^2\right) = \text{ƏBOB}\left(x_1, y_1\right)^{\min(k,2)} = 1 = \text{ƏBOB}\left(y_1, y_1^2 - x_1^2\right)$ olacaqdır, yəni, $x_1^k y_1$ ədədilə $y_1^2 - x_1^2$ ədədi qarşılıqlı sadə ədədlərdir. Onda p tam ədəd olması üçün $y_1^2 - x_1^2 \mid d^{k-1}$ olmalıdır. Bundan əlavə $y_1 > x_1$ olmalıdır və deməli $x_1^k y_1 > 1$. Onda, yuxarıdakı ifadənin p tam sadə ədədinə bərabər olması üçün $x_1 = 1, y_1 = p$ və $y_1^2 - x_1^2 = d^{k-1}$ bərabərliklərinin hər birinin eyni anda ödənməsi zəruridir.

Əgər $k = 1$ olarsa, onda $1 = p^2 - 1$ olar və aydındır ki, bu halda heç bir həll olmaz.

$k = 2$ olarsa, onda $d = p^2 - 1$ olar və $(x, y) = \left(p^2 - 1, p\left(p^2 - 1\right)\right)$ cütlüyü hər bir sadə p ədədi üçün tələb olunan şərti ödəyər. Deməli, $k = 2$ həlldir.

$k > 2$ olarsa, $d^{k-1} = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ olmasını istəyirik. Asanlıqla görmək olar ki, $p = 2$ halında həll yoxdur, çünki 3 heç bir natural ədədin $(k-1)$-ci qüvvəti deyil. Deməli, p tək sadə ədəddir. Onda $8 \mid p^2 - 1$ olar və buna görə də $k - 1 \geq 3$ olmalıdır. Deməli, $k = 3$ həll deyil. $p = 3$, $d = 2$ olarsa, $(x, y) = (2, 6)$ olar və $k = 4$ həll olar.

Sonda $k > 4$ olarsa, heç bir həllin olmadığını göstərək. Bunun üçün iki hala nəzər yetirməliyik.

Case 1 $k - 1$ cüt olarsa, onda

$$1 = p^2 - d^{k-1} = (p - d^{\frac{k-1}{2}})(p + d^{\frac{k-1}{2}})$$

olar, lakin iki tam kvadratın fərqi heç zaman birə bərabər ola bilməz.

Case 2 $k - 1$ tək olarsa, onda

$$d + 1 \mid d^{k-1} + 1 = p^2$$

olar və geriyə $d + 1 \in \{p, p^2\}$ halları qalar.

Əgər $d + 1 = p^2$ olarsa, onda $p^2 = (p^2 - 1)^{k-1} + 1 > (p^2 - 1) + 1 = p^2$ olar və bu da ziddiyyət təşkil edər.

Əgər $d + 1 = p$ olarsa və $k - 1 > 3$ olduğundan, onda $p^2 = (p-1)^{k-1} + 1 > (p-1)^3 + 1 = p^3 - 3p^2 + 3p$ olar. Lakin bu bərabərsizlik $p \geq 3$ olarsa doğru olmaz və yenidən ziddiyyət əldə edərik.

Yeganə həllər $k = 2, 4$ olar

□

- $d = \text{ƏBOB}(x, y)$ olarsa, $p^2 - 1 = d^{k-1}$ olduğunu isbat etmək *+3 bal*
- $k = 1$ halında həll olmadığını isbat etmək *+1 bal*
- $k = 2$ halının həll olduğunu göstərmək *+1 bal*
- $k = 3$ halında həll olmadığını isbat etmək *+1 bal*
- $k = 4$ halının həll olduğunu göstərmək *+1 bal*
- $k > 4$ halında həll olmadığını isbat etmək *+3 bal*
  - $k - 1$ cüt olma halını həll etmək *+1 bal*
  - $k - 1$ tək olma halını həll etmək *+2 bal*

Sual 4. *Müsbət tam tək n ədədi verilib. Elə ən kiçik müsbət tam k ədədini tapın ki, $3 \times k$ ölçülü cədvəlin bütün xanalarını mənfi olmayan tam ədədlərlə elə doldurmaq olsun ki, aşağıdakı şərtlər ödənsin:*

(1) İstənilən sütundakı ədədlərin cəmi n-ə bərabərdir.

(2) $0, 1, \cdots, n$ ədədlərinin hər biri istənilən sətirdə ən azı 1 dəfə iştirak edir.

Həlli. İstənilən sətirdə $0, 1, \cdots, n$ ədədlərinin hər biri mövcud olduğu üçün cədvəldəki ədədlərin cəmi ən azı $3 \cdot (0 + 1 + \cdots + n) = \frac{3n(n+1)}{2}$-dir. Sütunlardakı ədədlərin cəmini nəzərə alsaq taparıq ki, cədvəldəki ədədlərin cəmi $k \cdot n$-dir. Bərabərsizliyə əsasən $k \geq \frac{3(n+1)}{2}$ alırıq. Tutaq ki, $n = 2t + 1$. Aşağıdakı 3 cədvəli yanaşı yerləşdirsək alınan cədvəl şərti ödəyər:

0	0	$\cdots$	0	0
0	1	$\cdots$	$t-1$	t
$2t-1$	$2t$	$\cdots$	$t+2$	$t+1$

0	1	$\cdots$	$t-1$	t
$2t+1$	$2t$	$\cdots$	$t+2$	$t+1$
0	0	$\cdots$	0	0

$2t+1$	$2t$	$\cdots$	$t+2$	$t+1$
0	0	$\cdots$	0	0
0	1	$\cdots$	$t-1$	t

□

- Bütün ədədlərin cəminin $k \cdot n$ olduğunu qeyd etmək *+2 bal*
- Bütün ədədlərin cəminin ən azı $\frac{3n(n+1)}{2}$ olduğunu isbat etmək *+2 bal*
- $k \geq \frac{3(n+1)}{2}$ bərabərsizliyini isbat etmək *+1 bal*
- $k = \frac{3(n+1)}{2}$ üçün nümunə vermək *+5 bal*

Qeyd: Xüsusi hal üçün verilən nümunələr yalnız $n \geq 5$ üçün və 1 bal olmaqla qiymətləndirilir.